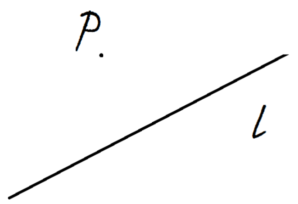
Vorlesung 27, 18.07.2016

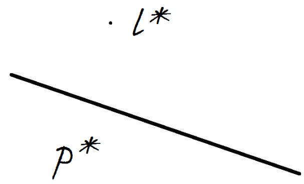
§ 6 Duale Kurve und Plücklerformeln

(6.1) Dualität von projektiven Räumen

Sei V ein k-Vektorraum, $V^* = Hom(V, k)$ der duale Vektorraum, $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V^*)$ die zugehörigen projektiven Räume. $\mathbb{P}(V^*)$ wird der zu $\mathbb{P}(V)$ dual projektive Raum genannt. Punkte von $\mathbb{P}(V^*)$ stehen in einer 1:1-Beziehung zu Hyperebenen in $\mathbb{P}(V)$.



$\mathbb{P}^2$



$(\mathbb{P}^2)^*$

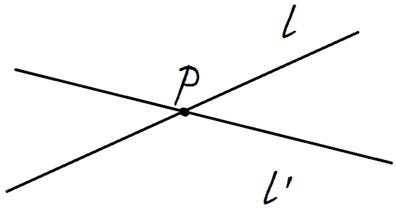
Es sei $\{uX + vY + wZ = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ eine Gerade. Diese Gerade korrespondiert in einer 1:1 Beziehung mit einem Punkt $(u : v : w) \in (\mathbb{P}^2)^*$. Umgekehrt korrespondiert ein Punkt $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2$ in einer 1:1 Beziehung mit einer Geraden $\{xU + yV + zW = 0\} \subset (\mathbb{P}^2)^*$. Die Geraden in einem Raum entsprechen also den Punkten im anderen Raum und umgekehrt.
Es seien $l : uX + vY + wZ = 0$ und $l' : u'X + v'Y + w'Z = 0$ zwei Geraden in $\mathbb{P}^2$. Diese korrespondieren zu den Punkten $l^* = (u : v : w)$ bzw. $l'^* = (u' : v' : w')$ in $(\mathbb{P}^2)^*$.Für den Schnitt von l und l' ergibt sich

$$P = l \cap l' : (x : y : z) = \left(\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \right).$$

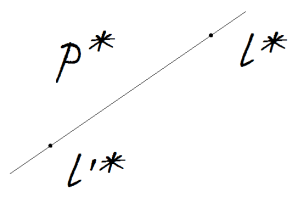
Die, durch die Punkte l^* und l'^* in $(\mathbb{P}^2)^*$, aufgespannte Gerade ist bestimmt durch

$$|l^* l'^*| = \left\{ \begin{vmatrix} U & V & W \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

Folglich korrespondiert $l \cap l'$ zu $\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} U + \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} V + \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} W = 0.$



$\mathbb{P}^2$



$(\mathbb{P}^2)^*$

(6.2) Duale Kurve

Definition.

$$\mathcal{C}^* := \{L^* \in (\mathbb{P}^2)^* | es\ existiert\ ein\ p \in \mathcal{C} : I(\mathcal{C}, L; p) > mult_p(\mathcal{C})\}$$

heißt "Duale"von $\mathcal{C}$.

Bemerkung: $\mathcal{C}^*$ muss kein Kurve sein. Ist $\mathcal{C}$ eine Gerade L so gilt $\mathcal{C}^* = \{L^*\}$.

Satz. Sei $\mathcal{C}$ eine irreduzible Kurve von Grad $n \geq 2$. Dann gilt

(1) $\mathcal{C}$ ist eine ebene algebraische Kurve. Für $n^* = Grad(\mathcal{C})$ gilt $2 \leq n^* \leq n(n-1)$.

(2) $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$. (Bidualitätssatz).

Es bezeichne $\Sigma = Sing(\mathcal{C})$ die Singularitäten der Kurve $\mathcal{C}$. Weiter betrachten wir eine Abbildung φ gegeben durch

$$\varphi : \mathcal{C} \setminus \Sigma \to (\mathbb{P}^2)^* \ , \ p \mapsto (T_p\mathcal{C})^*.$$

Das heißt, p werde geschickt auf die Tangente an $\mathcal{C}$ in p. Dann gilt $\mathcal{C}^* = \overline{\varphi(\mathcal{C} \setminus \Sigma)}$.

Betrachten wir nun eine Kurve $\mathcal{C}$ mit Gleichung

$$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0,$$

sowie eine Punkt $p = (x : y : z) \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$.
Dann ist die Tangente an $\mathcal{C}$ in p

$$T_p\mathcal{C} : \partial_x F(p)X + \partial_y F(p)Y + \partial_z F(p)Z = 0.$$

Das heißt, φ lässt sich beschreiben durch

$$\varphi : \mathcal{C} \setminus \Sigma \to (\mathbb{P}^2)^* \ , \ p \mapsto (\partial_x F(p) : \partial_y F(p) : \partial_z F(p)).$$

Beispiel. (1) Es sei $\mathcal{C} : aX^2 + bY^2 + cZ^2$ mit $a, b, c \neq 0$ fest. Sei $(x : y : z) \in \mathcal{C}$ dann folgt $(x : y : z) \mapsto (2ax : 2by : 2cz) = (ax : by : cz) := (u : v : w)$. Gleichungen für $\mathcal{C}^*$ sind

$$ax = u \ , by = v \ , cz = w.$$

Man eliminiere nun x, y, z und erhalte

$$x = \frac{u}{a} \ , y = \frac{v}{b} \ , z = \frac{w}{c}.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung von $\mathcal{C}$ liefert

$$a\left(\frac{u}{a}\right)^2 + b\left(\frac{v}{b}\right)^2 + c\left(\frac{w}{c}\right)^2 = 0.$$

Somit erhält man als Gleichung für $\mathcal{C}^*$

$$\frac{1}{a}u^2 + \frac{1}{b}v^2 + \frac{1}{c}w^2 = 0.$$

(2) Setze $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ und $u = u_1, v = u_2, w = u_3$. Es sei $\mathcal{C}$: $\sum A_{ij}x_i x_j = 0$, wobei $det(A) \neq 0$. Man bestimme die Ableitungen:

$$\sum A_{ij}x_j = u_i$$

und daher

$$x_j = \sum A_{ji}^{-1}u_i.$$

Einsetzen in obige Gleichung für $\mathcal{C}$ ergibt

$$\sum A_{ij}A_{jl}^{-1}A_{jm}^{-1}u_l u_m = \sum A_{lm}^{-1}u_l u_m.$$

Folglich korrespondiert $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}^*$ falls A mit A^{-1} korrespondiert.

(3) Es sei $F = X^3 + Y^3 + Z^3$ und $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$ das Verschwindungsideal von F. Sei $(x : y : z) \in \mathcal{C}$ so folgt $T_p\mathcal{C} : 3x^2X + 3y^2Y + 3z^2Z = 0$ und $(T_p\mathcal{C})^* = (3x^2 : 3y^2 : 3z^2) = (x^2 : y^2 : z^2)$. Ablesen der Koeffizienten ergibt

$$u = x^2 \ , v = y^2 \ , w = z^2.$$

Ziel ist nun wiederum x, y, z zu eliminieren um so eine Gleichung in u, v, w zu erhalten. Schreibe dazu

$$x = u^{\frac{1}{2}} \ , y = v^{\frac{1}{2}} \ , z = w^{\frac{1}{2}}.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt

$$u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}} + w^{\frac{3}{2}} = 0$$

beziehungsweise

$$u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}} = -w^{\frac{3}{2}}.$$

Quadrieren der Gleichung ergibt

$$(u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}})^2 = w^3.$$

Dies ist äquivalent zu

$$u^3 + v^3 - w^3 = -2u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}.$$

Durch erneutes quadrieren erhält man

$$(u^3 + v^3 - w^3)^2 = 4u^3v^3.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$u^6 + v^6 + w^6 - 2u^3v^3 - 2u^3w^3 - 2v^3w^3 = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für $\mathcal{C}^*$.

(6.3) Zum Beweis

(1) Erinnerung: Diskriminante: Sei $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ und $f' = a_0x^{n-1} + ... + a_1$ die formale Ableitung von f. Die Diskriminante von f ist dann gegeben durch

$$d(a_0, ..., a_n) = Res(f, f').$$

Hierbei bezeichnet $Res(g, h)$ die Determinante der Sylvester-Matrix erzeugt von g, h.

Für

$$G(X, Y) = a_0X^n + a_1X^{n-1}Y + ... + a_nY^n$$

gilt

$$d(a_0, ..., a_n) = 0 \Longleftrightarrow G \textit{ besitzt einen Faktor mit mult} > 1.$$

(2) Sei nun eine Gleichung für $\mathcal{C}$ gegeben durch $F(X, Y, Z) = 0$ und $uX + vY + wZ = 0$ eine Gleichung für l. Angenommen es gilt $w \neq 0$ dann gilt $Z = -\frac{uX}{w} - \frac{vY}{w}$. Einsetzen in die Gleichung für $\mathcal{C}$ ergibt

$$F(X, Y, -\frac{u}{w}X - \frac{v}{w}Y).$$

Schreibe nun

$$w^nF(X, Y, -\frac{u}{w}X - \frac{v}{w}Y) = a_0X^n + a_1X^{n-1}Y + ... + a_nY^n$$

dabei ist $a_i = a_i(u, v, w)$.

Setze

$$\mathcal{D}(u, v, w) = d(a_0(u, v, w)), ..., d(a_n(u, v, w))) \in \mathbb{C}[u, v, w].$$

Dann gilt

$$(u : v : w) \in \mathcal{V}(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow w^nF(X, Y, -\frac{u}{w}X - \frac{v}{w}Y)\ hat\ mehrfache\ Nullstelle$$

Dies wiederum bedeutet

$$(u, v, w) \in \mathcal{C}^* \Longrightarrow (u : v : w) \in \mathcal{V}(\mathcal{D})$$

und schließlich erhält man

$$\mathcal{C}^* \subset \mathcal{V}(\mathcal{D}).$$

(3) Eine lokale Parametrisierung von $\mathcal{C}$ ist gegeben durch

$$\begin{cases} x(t) = t^m \\ y(t) = t^M + ... \\ z(t) = 1 \end{cases} \quad \text{differenzieren nach } t \text{ ergibt} \begin{cases} \dot{x}(t) = mt^{m-1} \\ \dot{y}(t) = Mt^{M-1} + ... \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}.$$

Eine Tangente an $\mathcal{C}$ in $(x(t) : y(t) : z(t))$ ist gegeben durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{vmatrix} = 0.$$

$\mathbb{P}^2$ $(\mathbb{P}^2)^*$

Durch Bestimmung der 2x2-Minoren erhält man

$$\left(\begin{vmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z & x \\ \dot{z} & \dot{x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \right) = (-Mt^{M-1} + ... : mt^{m-1} : (M-m)t^{m+M-1} + ...)$$
$$= (-Mt^{M-m} + ... : m : (M-m)t^{M} + ...)$$

Fazit: Ist $\begin{cases} x(t) = t^m \\ y(t) = t^M + ... \\ z(t) = 1 \end{cases}$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}$ dann ist
$\begin{cases} u(t) = -Mt^{M-m} + ... \\ v(t) = m \\ w(t) = (M-m)t^M + ... \end{cases}$ eine Parametrisierung von $\mathcal{C}^*$.

Bestimme nun die Duale der Dualen. Dazu differenziere man wiederum nach t

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -M(M-m)t^{M-m} + ... \\ \dot{v}(t) = 0 \\ \dot{w}(t) = M(M-m)t^{M-1} + ... \end{cases}$$

Berechnung der Minoren

$$\left(\begin{vmatrix} v & w \\ \dot{v} & \dot{w} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w & u \\ \dot{w} & \dot{u} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{vmatrix} \right) = \begin{array}{r} (m(M-m)t^{M-1} + ... : -(M-m)M(M-m)t^{2M-m-1} + ... \\ ... + M(M-m)t^{2M-m-1} : mM(M-m)t^{M-m-1}) \end{array}$$
$$= (t^{M-1} + ... : t^{2M-m-1} + ... : t^{M-m-1})$$
$$= (t^m + ... : t^M + ... : 1 + ...)$$

Hier wurde in der vorletzten Gleichheit durch $m(M-m)$ und in der letzten Gleichheit durch t^{M-m-1} dividiert.
Für $t = 0$ erhält man nun den ursprünglichen Punkt $(0 : 0 : 1)$. Da dieser beliebig gewählt war folgt

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{**}.$$

□